

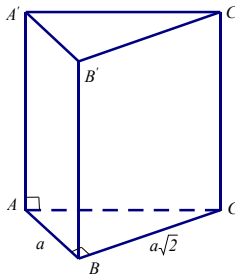
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (BÀI TẬP LẦN 2)

Câu 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B ,

$AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, mặt bên $AA'B'B$ có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể

tích khối lăng trụ.

Lời giải



$$\text{Ta có } S_{AA'B'B} = AB \cdot AA' \Rightarrow AA' = \frac{S_{AA'B'B}}{AB} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A ,

$BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos \widehat{BA'C} = \frac{5}{6}$. Tính thể tích hình lăng trụ

$ABC.A'B'C'$.

Lời giải

Đặt $AB = x$ thì $A'B^2 = A'C^2 = x^2 + 2a^2$

Áp dụng định lí hàm số cosin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$$\cos BA'C = \frac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B.A'C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2(x^2 + 2a^2)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = a$$

Suy ra ΔABC đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 3. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi. Hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác ABD . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ biết $AB = a$, $ABC = 120^\circ$, $AA' = a$.

Lời giải

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABD

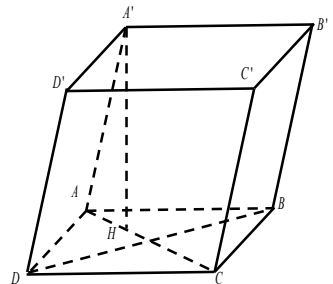
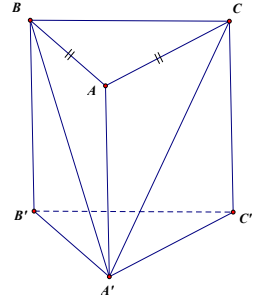
$A'H \perp (ABCD)$

Ta có: $ABD = 60^\circ$.

Tam giác ABD cân có $ABD = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều.

ABD là tam giác đều cạnh a

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



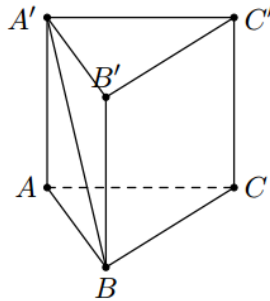
$$\Delta A'AH \text{ vuông tại } H \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 4. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , góc tạo bởi $A'B$ và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Ta có : $BB' \perp (A'B'C')$ nên $(A'B; (A'B'C')) = \angle A'B'B = 60^\circ$.

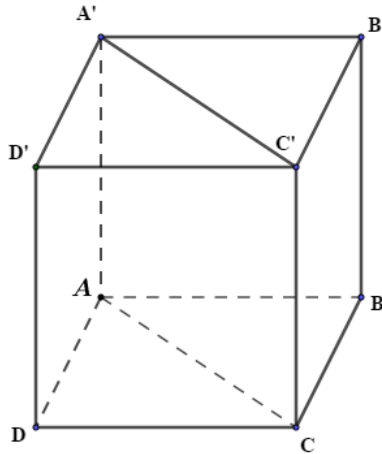
Xét tam giác $BB'A'$ vuông tại B' có $\tan 60^\circ = \frac{BB'}{B'A'} \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$.

$$\text{và } S_{\Delta A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}.$$

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích mặt chéo $ACC'A'$ bằng $2\sqrt{2}a^2$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

Lời giải



Giả sử hình lập phương có cạnh bằng x ($x > 0$).

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$

Ta có $S_{ACC'A'} = AA'.AC = x.x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

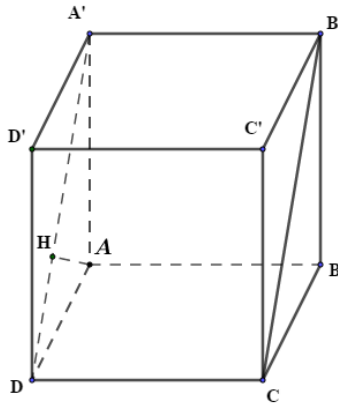
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = (a\sqrt{2})^3 = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a .

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể

tích khối hộp theo a .

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $A'B$.

$$\Rightarrow AH \perp (A'BCD') \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

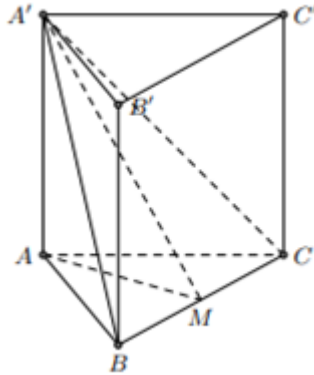
Gọi $AA' = x$ ($x > 0$). Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác $AA'B$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = a\sqrt{3}.a.a = a^3\sqrt{3}.$$

Câu 7. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) là 30° , tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

Lời giải



Gọi độ dài cạnh $AA' = x$ ($x > 0$). M là trung điểm BC .

Góc giữa $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) là góc $A'MA \Rightarrow A'MA = 30^\circ$.

Xét Δ vuông tại A có $\sin 30^\circ = \frac{A'A}{A'M} \Rightarrow A'M = \frac{A'A}{\sin 30^\circ} = 2x$.

$$\tan 30^\circ = \frac{A'A}{AM} \Rightarrow AM = \frac{A'A}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = x\sqrt{3}.$$

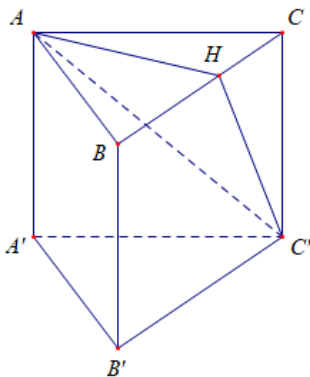
Xét tam giác ABC đều đường cao AM , suy ra $\frac{2AM}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} A'M \cdot BC = 2 \Leftrightarrow A'M \cdot BC = 4 \Leftrightarrow 2x \cdot 2x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } AA' = 1, AB = 2. \text{ Do đó } V = B.h = S_{ABC} \cdot A'A = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \sqrt{3}.$$

Câu 8. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $\angle ACB = 60^\circ$. Biết đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \frac{AB}{\tan CAB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $A'A \perp (ABC)$.

Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AC'H$ là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B') \Rightarrow AC'H = 30^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại A nên có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

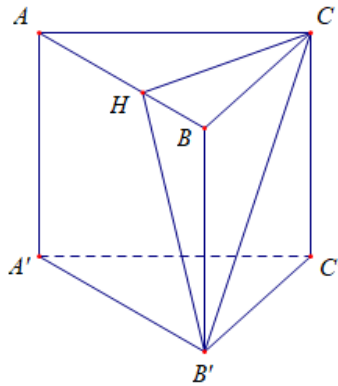
Tam giác AHC' vuông tại H nên có $AC' = \frac{AH}{\sin AC'H} = a$.

Tam giác ACC' vuông tại C nên có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a\sqrt{3}, BC = a, \angle ACB = 150^\circ$. Đường thẳng $B'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \sin 150^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $CH \perp AB$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow B'H$ là hình chiếu vuông góc của $B'C$ lên mặt phẳng $(ABB'A') \Rightarrow \angle CB'H$ là góc giữa đường thẳng $B'C$ và $(ABB'A') \Rightarrow \angle CB'H = \alpha$.

Tam giác ABC có $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$.

$$\Rightarrow CH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

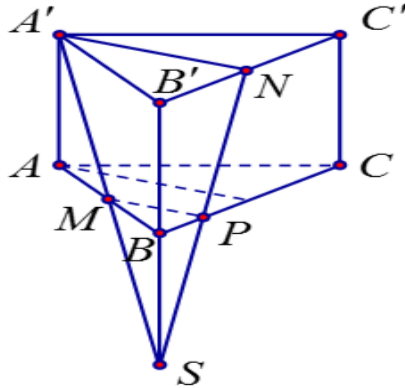
Tam giác $B'CH$ vuông tại H nên có $B'C = \frac{CH}{\sin \alpha} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác $BB'C$ vuông tại B nên có $BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \frac{a\sqrt{35}}{7}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{35}}{7} = \frac{a^3\sqrt{105}}{28}.$$

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích V khối đa diện $MBP.A'B'N$.

Lời giải



Gọi S là giao điểm của các đường $A'M$; NP và BB' . Có M ; B ; P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA' ; SB' và SN .

$$\text{Vì } \Delta ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\frac{V_{S.BMP}}{V_{S.A'B'N}} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SM}{SA'} \cdot \frac{SP}{SN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.BMP} = \frac{1}{8} V_{S.A'B'N} \Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8} V_{S.A'B'N}$$

Vì B là trung điểm của SB' nên $V_{S.A'B'N} = 2.V_{B.A'B'N}$. Vì N là trung điểm của $B'C'$

$$\text{ nên } V_{B.A'B'N} = \frac{1}{2}V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{ Từ và ta có } V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8}V_{S.A'B'N} = \frac{7}{8} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$